Соотношение статистических свойств числа соударений и длины траетории частицы

1 Цели

В нашей работе мы хотим найти:
1) Распределение длины траектории частицы при фиксированном числе соударений с другими частицами
2) Распределение числа соударений частицы при фиксированной длине ее траектории

2 Средняя длина свободного пробега

Молекулы газа, находясь в хаотическом движения, непрерывно сталкиваются друг с другом. Между двумя последовательными столкновениями молекулы проходят некоторый путь L, называемым длиной свободного пробега. В общем случае длина пути между последовательными столкновениями различна, но так как мы имеем дело с очень большим числом молекул и они находятся в беспорядочном движении, то можно говорить о средней длине свободного пробега молекул $\bar{L}$. Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы d. Он зависит от скорости сталкивающихся молекул, т. е. от температуры газа (несколько уменьшается с ростом температуры).

Так как за 1 с молекула в среднем проходит путь, который равен средней арифметической скорости $\bar{v}$, и если $\bar{z}$ — среднее число столкновений, которые одна молекула газа делает за 1 с, то средняя длина свободного пробега будет $\bar{L} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}}$. Для определения $\bar{z}$ представим себе молекулу в виде шарика диаметром d, которая движется среди других как бы застывших молекул. Эта молекула столкнется только с теми молекулами, центры которых находятся на расстояниях, равных или меньших d, т. е. лежат внутри так называемого ломаного цилиндра радиусом d.

Число столкновений z молекулы с другими молекулами в секунду будет равно числу молекул, центры которых находятся в цилиндре длиной, численно равной $\bar{v}$, и диаметром $2d$. Это число выражается формулой:

$$\bar{z} = nV \tag{1}$$

Распишем концентрацию и объем этого цилиндра. Получим:

$$\bar{z} = n\pi d^2 \bar{v} \tag{2}$$

В формулу нужно внести поправку на то, что данная молекула сталкивается не с неподвижными молекулами, а с движущимися. Это обстоятельство будет учтено, если вместо средней абсолютной скорости записать среднюю относительную скорость. Но скорость - вектор. Поэтому в среднем скорости сталкивающихся молекул будут перпендикулярны друг другу. Отсюда:

$$\bar{v_{rel}} = \sqrt{2} * \bar{v} \tag{3}$$

Итого получаем:

$$\bar{z} = \sqrt{2} n\pi d^2 \bar{v} \tag{4}$$

Найдем длину свободного пробега:

$$\bar{L} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \sqrt{2}\pi d^2 n \tag{5}$$

3 Распределение длины свободного пробега

Вычисленная ранее средняя длина свободного пробега (5) дает лишь значение, усредненное по большому числу столкновений. Чтобы найти, как конкретно изменяются длины свободного пробега, сначала необходимо вычислить вероятность того, что молекула пройдет после своего последнего соударения путь x, ни разу не столкнувшись с другими молекулами. Очевидно, что функция распределения $F(x)$ должна удовлетворять условиям $F(0) = 1$ и $F(\infty) = 0$.

Предположим, что предыстория молекулы не влияет на вероятность соударений, т. е. вероятность соударения в любом случае совершенно не зависит от того, сталкивалась ли молекула только что, или она прошла большой путь без столкновений. Тогда вероятность того, что молекула пройдет без столкновений расстояние $r = x_1 + x_2$ будет равна произведению вероятностей пройти без соударений путь x_1 и x_2 соответственно:

$$F(r) = F(x_1 + x_2) = F(x_1)F(x_2) \tag{6}$$

Уравнения этого типа имеют единственное решение вида:

$$F(x) = ke^{-\lambda x} \tag{7}$$

Найдем параметры k и λ. Теперь найдем вероятность того, что молекула пройдет путь без столкновений, но обязательно столкнется на следующем отрезке Δx. Это и будет искомой плотностью распределения $f(x)$ длин свободных пробегов.

Величина $F(\Delta x)$ есть вероятность того, что молекула пройдет путь Δ без столкновений. Тогда $1 - F(\Delta x)$ будет вероятностью столкновения в ннтер-рале Δ. Следовательно, $f(x)$ будет равно $F(x)$ (вероятности того, что молекула пройдет путь x без столкновений), умноженной на $1 - F(\Delta x)$:

$$f(x)\Delta x = F(x)(1 - F(\Delta x)) = F(x) - F(x + \Delta x) \tag{8}$$

или

$$f(x) = \frac{F(x) - F(x + \Delta x)}{\Delta x} \tag{9}$$

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ получаем:

$$f(x) = -\frac{dF(x)}{dx} \tag{10}$$

После замены $F(x) = e^{-\lambda x}$ ($k = 1$ в силу условий $F(0) = 1$):

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \tag{11}$$

Среднее значение длины свободного пробега $\bar{L}$ равно:

$$\bar{L} = \int_0^\infty xf(x)dx = \lambda \int_0^\infty xe^{-\lambda x}dx \tag{12}$$

Из этого интегрирования непосредственно следует, что:

$$\bar{L} = \frac{1}{\lambda} \tag{13}$$

Значит в итоге плотность распределения можно выразить в виде:

$$f(x) = \frac{1}{\bar{L}}e^{-x/\bar{L}} \tag{14}$$

По сути экспоненциальное убывание этого выражения означает, что вероятность лететь долго, не испытывая столкновений, меньше, чем вероятность не столкнуться. То есть малые расстояния свободного пробега вероятней, чем большие.

4 Переход к распределению длины свободного пробега при фиксированном числе столкновений

В предыдущем пункте мы нашли распредление длины свободного пробега (14) для одного соударения. Обозначим соответственно ее:

$$f_1(x) = \frac{1}{\bar{L}} e^{-x/\bar{L}} \tag{15}$$

Перейдем к случаю с 2 столкновениями. Введем дискретную длину, а именно разобьем траекторию частицы на маленькие части Δl. Пусть $l_1 = m\Delta l$ - длина свободного пробега до первого столкновения. Вероятноть столкновения на m-ом интервале равна $f_1(x = m\Delta l)\Delta l$.

Тогда вероятность события, что следующее столкновение произойдет при длине траектории l, при условии, что первое столкновение было на m-ом интервале(то есть при длине траектории $l_1 = m\Delta l$) будет равно $f_1(l - l_1)\Delta l$. Это соответствует тому, что расстояние между первым и вторым столкновениями было $l - l_1$. Поскольку нас интересует только момент появления второго столкновения, а первый может при любой длине траектории, то, применяя формулу полной вероятности, получаем

$$f_2(x)\Delta l = \sum_{m=1}^{\infty} f_1(m\Delta l)\Delta l f_1(x - m\Delta l)\Delta l \tag{16}$$

Переходя к непрерывной длине траектории и интегрируя по l, получаем

$$f_2(x) = \int_0^x f_1(l) f_1(x-l) dl = \frac{1}{\bar{L}^2} \int_0^x \exp\left(-\frac{l}{\bar{L}}\right) \exp\left(-\frac{l-x}{\bar{L}}\right) dl \tag{17}$$

В итоге распределение для 2 столкновений можно выразить через распределение для 1 столкновения

$$f_2(x) = \frac{x}{\bar{L}^2} \exp\left(-\frac{x}{\bar{L}}\right) = \frac{x}{\bar{L}} f_1(x) \tag{18}$$

Рассуждая аналогично для длины траектории при третьем столкновении, получаем

$$f_3(x) = \int_0^x f_2(l) f_2(x-l) dl = \frac{1}{\bar{L}^3} \int_0^x \exp\left(-\frac{l}{\bar{L}}\right) \exp\left(-\frac{x-l}{\bar{L}}\right) dl, \tag{19}$$

$$f_3(x) = \frac{x^2}{2\bar{L}^3} \exp\left(-\frac{x}{\bar{L}}\right) = \frac{x}{2\bar{L}} f_2(x) \tag{20}$$

Получая аналогично для $f_4(x)$ и для $f_5(x)$ можно заметить закономерность $f_{n+1}(x) = (x/\bar{L}) f_n(x)$ и, следовательно, выписать итоговую формулу (3) плотности распределения длины свободного пробега при фиксированных n соударениях

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!\bar{L}^n} \exp\left(-\frac{x}{\bar{L}}\right) \tag{21}$$

Заметим, что полученное распределение (21) является Гамма-распределением. Именно его можно наблюдать при работе в режиме №1. Важно отметить, что в данном случае x - случайная величина (длина траектории), а n - фиксировано (число соударений). Основные характеристики: матожидание $< x >= n\bar{L}$ и дисперсия $\sigma_x^2 = n^2 \bar{L}$

5 Распределение числа столкновений при фиксированной длине траектории частицы

Найдем вероятность того, что к моменту, когда длина траетории частицы равна x, она столкнулась с другими частицами n раз. То есть, в отличие от Гамма-распределения, n является случайной величиной, а x - параметр распределения.

Вероятность события, что n-ое столкновение произошло в малом интревале по длине траектории $(x, x + \Delta x)$ определяется Гамма-распределением (21) по определению плотности вероятности

$$f_{n+1}(x)\Delta x = \frac{x^n}{n!\bar{L}^{n+1}} \exp\left(-\frac{x}{\bar{L}}\right) \Delta x \tag{22}$$

Это же событие состоит из двух независимых событий: (I) до момента с длиной траектории x было ровно n столкновений с вероятностью $P_x(n)$ и (II) на интервале Δx появилось $n+1$ столкновение с вероятностью $\bar{L}^{-1}\Delta x$. Получаем

$$P_x(n) = \frac{f_{n+1}(x)\Delta x}{\bar{L}^{-1}\Delta x} = f_{n+1}(x)\bar{L} \tag{23}$$

Из этого получаем окончательную формулу для распределения

$$P_x(n) = \frac{(x/\bar{L})^n e^{-t/\bar{L}}}{n!} \tag{24}$$

Делаем вывод: итоговое распределение числа столкновений частицы при заданной длине траетории (24) является Паусcоновским. Его основные характеристики

$$< n >= \frac{x}{\bar{L}}, \quad \sigma_n^2 = \frac{x^2}{\bar{L}} \tag{25}$$