МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В.Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Одномерное движение Броуновской частицы под действием шумов различной периодичности.

выполнили студенты 317 учебной группы факультета ВМК МГУ
Елисова Анастасия Алексеевна
Борисов Иван Максимович

гор. Москва
2023 г.

Содержание

Описание программы:

Вдоль горизонтальной оси движется большая квадратная частица, движение которой вызывается ударами налетающих на неё справа и слева маленьких частиц.

Возможности пользователя:

1. Выбор режима (периодический, случайный, квазипериодический, несимметричный)
2. Выбор температуры (средней кинетической энергии частиц) – T (от 100 до 500)
3. Выбор массы круглых частиц – m (от 0.0001 до 1)
4. Выбор массы Броуновской частицы - M (от 0.01 до 10)
5. Задание количества частиц – n (от 1 до 100)
6. Выбор периода, мат. ожидания, интервала появления – ticks (от 1 до 40)
7. Выбор вероятности появления частиц слева – p.left (от 0 до 1)

Какие графики мы строим:

1. Значение полной кинетической энергии частицы
2. Значение ускорения частицы
3. Значение скорости частицы
4. Значение смещения частиц от времени

Вывод значений параметров:

Средняя скорость:

$$\langle K \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{mv_i^2}{2} = T -> \langle v_i \rangle = \sqrt{\frac{nT}{2m}}$$

Скорости частицы:
Используя законы сохранения импульса и энергии, получим:

$$\begin{cases} m(v_1 - v_1^{'}) = M(v_2 - v_2^{'}) \\ m(v_1^2 - v_1^{'2}) = M(v_2^2 - v_2^{'2}) \end{cases}$$

$$\frac{v_1^2 - v_1^{'2}}{v_1 - v_1^{'}} = \frac{v_2^2 - v_2^{'2}}{v_2 - v_2^{'}}$$

$$v_1^{'} = v_2 + v_2^{'} - v_1$$

$$v_2^{'} = v_1 + v_1^{'} - v_2$$

$$mv_1 + Mv_2 = mv_1^{'} + M(v_1 + v_1^{'} - v_2)$$

$$mv_1 + Mv_2 = m(v_2 + v_2^{'} - v_1) + Mv_2^{'}$$
$$v_1^{'} = \frac{2Mv_2 + v_1(m-M)}{m+M}$$
$$v_2^{'} = \frac{2mv_1 + v_2(M-m)}{m+M}$$

Ускорение является дискретным:

$$a = \frac{v_{i+1} - v_i}{dt}$$

Теперь интерпретируем нашу задачу так:
Рассмотрим частицу, погруженную в вязкую жидкость с коэффициентом вязкости γ, на которую со стороны налетающих молекул действует случайная сила f(t).
Запишем для нее уравнение движения, называемое уравнением Ланжевен:

$$m\dot{v} = -\gamma v + f(t)$$

Поскольку направление ударов случайно и время между последовательными ударами о частицу налетающих молекул мало, предположим

$$\langle f(t)\rangle = 0, \langle f(t), f(t^{'})\rangle = A\delta(t - t^{'}), A > 0$$

Решая уравнение Ланжевена, получим

$$v(t) = v_0 e^{\frac{-t}{\tau_0}} \frac{1}{m} \int\limits_0^t dt' f(t') e^{\frac{t'}{\tau_0}},$$

где введено время релаксации $\tau_0 = \frac{m}{\gamma}$
Коррелятор скоростей

$$K_v(t - t') = \langle v(t) * v(t')\rangle = v_0^2 e^{\frac{-(t+t')}{\tau_0}} + e^{\frac{-(t+t')}{\tau_0}} \frac{1}{m^2} \int\limits_0^t dt_1 \int\limits_0^{t^{'}} dt_2 A\delta(t - t^{'}) e^{\frac{t_1+t_2}{\tau_0}}$$

На временах $t, t'\rangle\rangle\tau_0$, первым слагаемым можно пренебречь, вычисление интеграла дает

$$K_v(t - t') = \frac{A\tau_0}{2m^2} e^{\frac{-|t+t'|}{\tau_0}}$$

Для установившегося (в пределе больших времен) движения броуновской частицы ее средняя кинетическая энергия в случае одномерного движения равна $\frac{kT}{2}$. Соответственно, из условия

$$\frac{m}{2}\langle v^2(t)\rangle = \frac{m}{2} K_v(0) = \frac{kT}{2}$$

получим связь между средним квадратом случайной силы и вязкостью
Флуктуационно-диссипационная теорема:

$$A = 2\gamma kT$$

т.е. средний квадрат случайной силы A (амплитуда флуктуаций!) пропорционален вязкости γ

По сути, эта связь отражает факт, что и случайная сила, и вязкость — составляющие одного и того же механизма взаимодействия броуновской частицы с окружающими ее молекулам. Окончательно, для коррелятора скорости имеем

$$K_v(t-t') = \frac{kT}{m}e^{\frac{-|t+t'|}{\tau_0}}$$

Вязкость выражается как $\gamma = \frac{(1.717*10^{-5}(\frac{T}{273})^{0.683})}{\frac{p_{air}}{287.4*T}}$