Определение периодичности случайной структуры.

1 Постановка задачи

В этой работе рассматривается “степень случайности” расположения различных объектов на примере изображений растений на лугу, орнамента, шкуры животного и т.п. На основе характеристик расположения объектов, полученных эксперименально, находятся среднее расстояние между соседями и среднее квадратичное отклонение. В соответсвии с этими величинами происходит классификация полученного распределения:

- Суб-пуассоновская статистика
- Пуассоновская статистика
- Супер-пуассоновская статистика

2 Основные определения

Рассмотрим случайную величину ξ. Говорят, что она имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda \geq 0$ ($\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$), если плотность $f(x)$ представима в виде

$$p_\xi(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{1}(x > 0).$$

Математическое ожидание: $\mathbb{E}\xi = \frac{1}{\lambda}$, Дисперсия: $\mathbb{D}\xi = \frac{1}{\lambda^2}$. Экспоненциальное распределение моделирует время между двумя последовательными свершениями одного и того же события (в пуассоновском процессе), частота которого составляет λ. Для исследования периодичности структуры время можно заменить на расстояние между объектами (т.е. событиями).

Рассмотрим другую случайную величину η, с характеристиками $\mathbb{E}\eta = \mu$, $\mathbb{D}\eta = \sigma^2$. Моделируемый случайной величиной η процесс называется суб-пуассоновским, если $\sigma^2 < \mu^2$, супер-пуассоновским, если $\sigma^2 > \mu^2$, и пуассоновским иначе.

Например, одними из представителей суб-пуассоновского распределения являются распределения χ^2 с $k \geq 2$ степенями свободы. $\eta \sim \chi^2(k)$.

$$p_\eta(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma(\frac{k}{2})} x^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}.$$

$\mu = \mathbb{E}\eta = k$; $\sigma^2 = \mathbb{D}\eta = 2k$. Очевидно, $\sigma^2 < \mu^2\ \forall k \geq 2 \implies \chi^2(k)$ - мы имеем дело с суб-пуассоновским процессом $\forall k \geq 2$.

Коэффициентом периодичности будем называть величину $T = 1 - \frac{\sigma^2}{\mu^2}$. Если $T < 0$, тогда случайная величина моделирует супер-пуассоновский процесс, если $T > 0$ - суб-пуассоновский.

3 Принцип работы

В изображении выбираются опорные точки, характеризующие данную структуру. Например, это может быть некоторая изотропная наноструктурая. Если она квазипериодична, то структуру, состоящую из ячеек разной величины, можно с большой степенью точности охарактеризовать расположением центров этих ячеек на некоторой линии, проведенной вдоль некоторого направления 1.

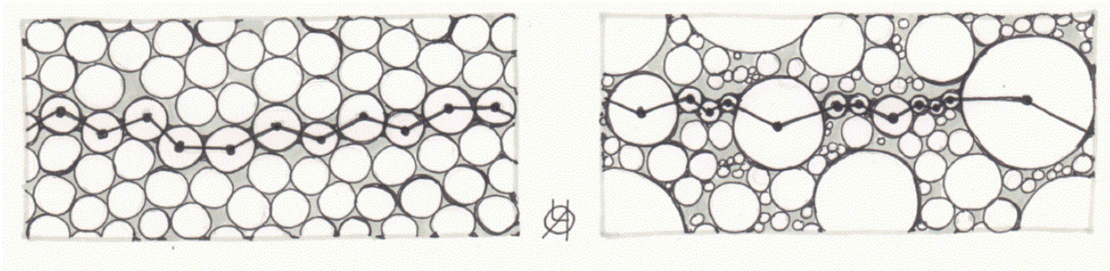

Рис. 1: Исследование периодичности изотропной наноструктуры с помощью случайного точечного процесса

При $T < 0$ получаем супер-пуассоновский процесс с импульсами, собранными в кластеры, с большими расстояниями между этими кластерами. В случае суб-пуассоновского процесса наблюдается отрицательная корреляция между импульсами. Появление одного уменьшает вероятность появления другого в ближайшем будущем, а при супер-пуассоновской статистике корреляции положительные 2.

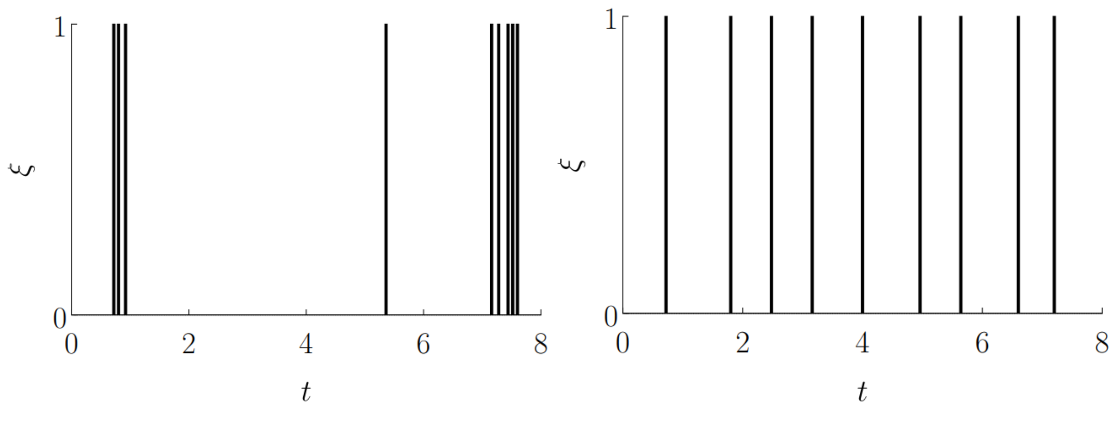

Рис. 2: Супер-пуассоновский процесс (слева), Суб-пуассоновский процесс (справа)

4 Возможные применения исследования периодичности структуры

Для неизотропных структур можно выбрать характерное направление для перехода к случайному точечному процессу, например, радиальная нить паутины. Периодичность паутины используется как индикатор состояния паука. С помощью этих паутин испытывают всякие психотропные вещества, имеющиеся в малом количестве. Дают пауку и смотрят, какую он сделает паутину. От веществ, например, концентрирующих внимание, получается строго периодическая паутина 3.

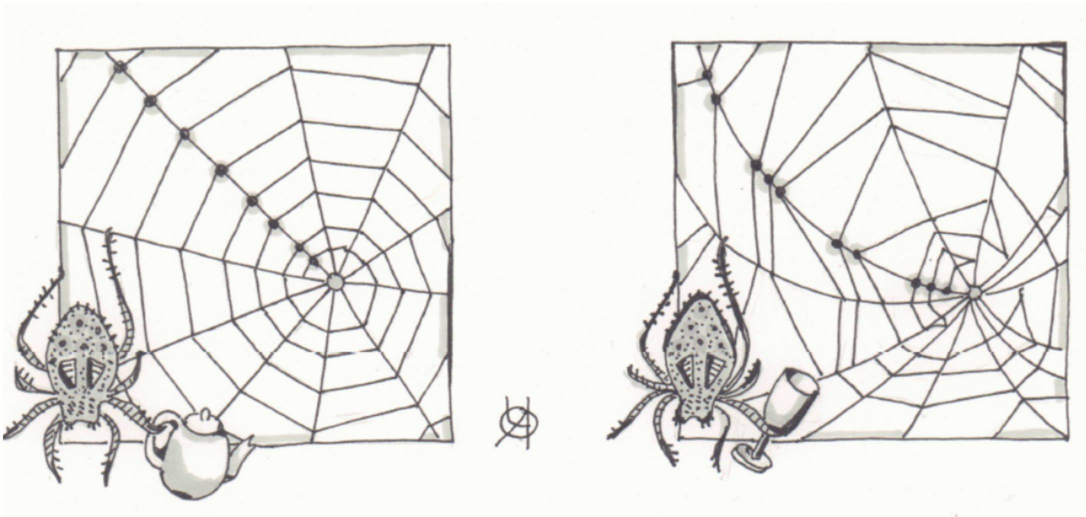

Рис. 3: Исследование случайности паутины с помощью случайного точечного процесса